Facultatea de Inginerie Electrică, Energetică
şi Informatică Aplicată (IEEIA)

Identificarea şi Modelarea Sistemelor

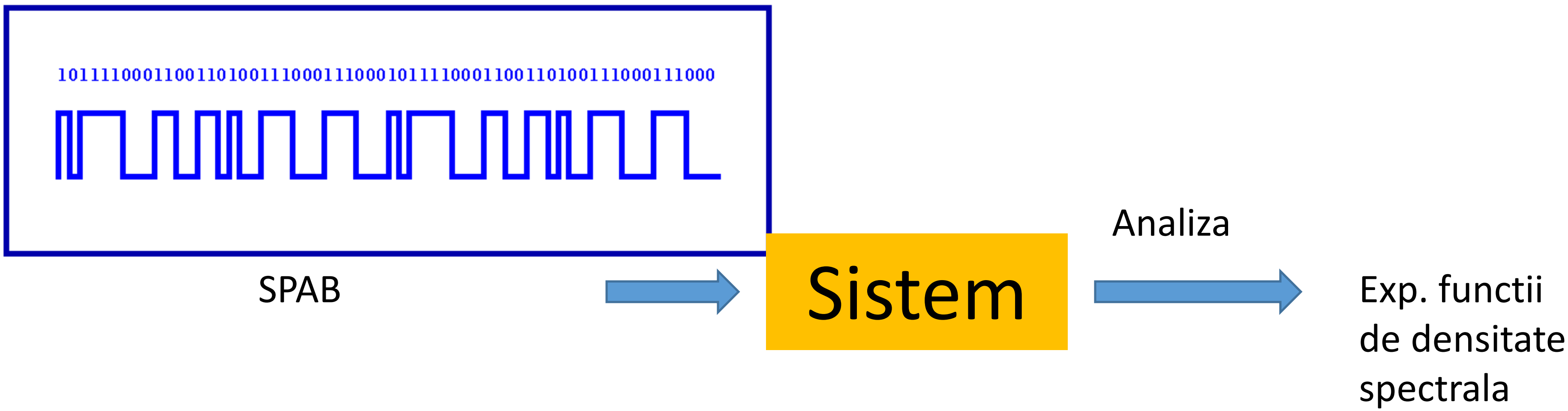
C8

Prof.univ.dr.ing. Marian-Silviu Poboroniuc

Identificarea sistemelor liniare continue cu semnale de probă aleatoare.

Identificarea cu semnale de probă aleatoare foloseşte procedee corespunzătoare calculului statistic:

- **determinarea funcţiilor de corelaţie şi a funcţiilor de densitate spectrală**, pe baza cărora se obţin modele neparametrice: funcţia pondere, caracteristicile de frecvenţă.



Pentru a **putea stabili o legătură directă** între **rezultatele experimentale şi caracteristicile dinamice ale procesului**, exprimate prin **modele neparametrice**, trebuie **asigurate** anumite **proprietăţi statistice prestabilite semnalelor de probă:**

- **staţionaritate**
- **ergodicitate**

O **mărime aleatoare** este **staţionară** dacă **proprietăţile statistice (densitatea de probabilitate, etc) ale unui eşantion** ***x(t)*** **rămân aceleaşi dacă se deplasează originea timpului,**

$$t \longrightarrow t + \tau \qquad \mathrm{x}(\mathrm{t}) \to \mathrm{x}(\mathrm{t} + \tau)$$

O **mărime aleatoare** este **ergodică** dacă satisface

proprietatea că mediile statistice sunt egale cu mediile temporale.

Identificarea cu semnale de probă aleatoare prezintă avantajele:

a) elimină sau reduce influenţa perturbaţiilor.

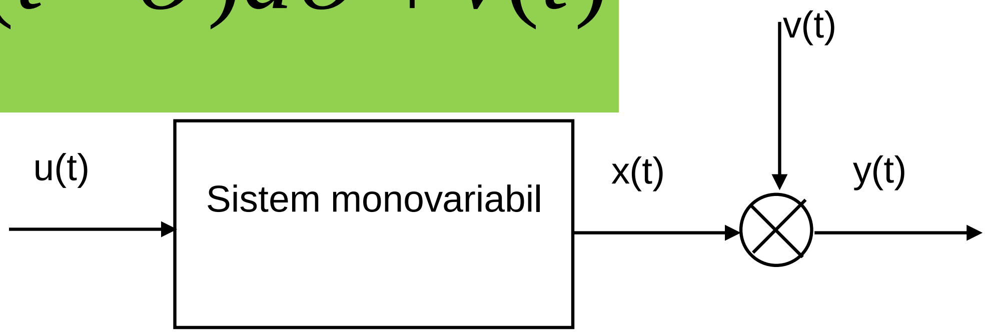
b) **în anumite condiţii identificarea se efectuează fără scoaterea din funcţiune a sistemului, prin suprapunerea semnalelor aleatoare peste mărimile care apar la intrarea sistemului în funcţionare normal.**

Principiul metodelor de identificare

Se consideră un sistem monovariabil, cu **mărimea de intrare *u(t)*** şi **mărimea de ieşire *y(t)***; la ieşirea sistemului acţionează o perturbaţie aleatoare staţionară *v(t)*.

Sistemul fiind considerat liniar, cu parametri concentraţi si cu funcţia pondere *h(t)* permite transferarea perturbaţiei ce acţionează într-un punct oarecare din sistem la ieşirea acestuia. Mărimea de ieşire se poate exprima prin relaţia:

$$y(t)=\int_0^{\infty} h(\sigma)u(t-\sigma)d\sigma+v(t)$$



Se presupune că intrarea *u(t)* şi perturbaţia *v(t)* sunt necorelate şi de medii nule,

$$E\big(u(t)\big) = E\big(v(t)\big) = 0; \qquad \mathrm{R}_{\mathrm{uv}}(\tau) = 0$$

Legătura între mărimea de ieşire *y(t)* şi cea de intrare *u(t)*, sub formă statistică, este exprimată prin **funcţia de intercorelaţie** a celor două mărimi

$$R_{uy}(\tau) = E[u(t)y(t+\tau)] = E[u(t)(\int_0^\infty h(\sigma)u(t+\tau-\sigma)d\sigma + v(t+\tau))] =$$

$$= \int_0^\infty h(\sigma)E[u(t)u(t+\tau-\sigma)]d\sigma + E[u(t)v(t+\tau)] =$$

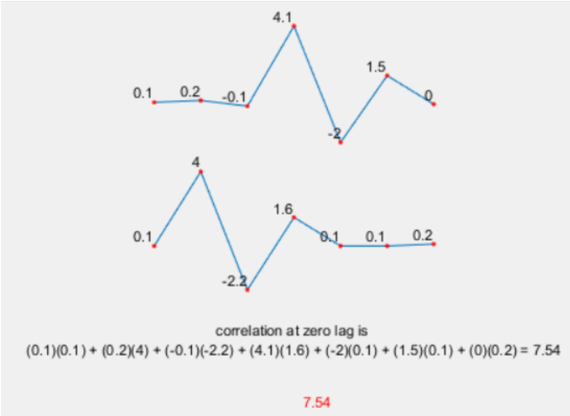
$$= \int_0^\infty h(\sigma)R_{uu}(\tau-\sigma)d\sigma + R_{uv}(\tau)$$

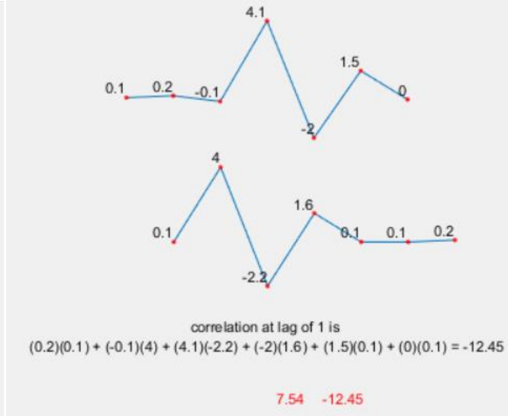
$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt$$

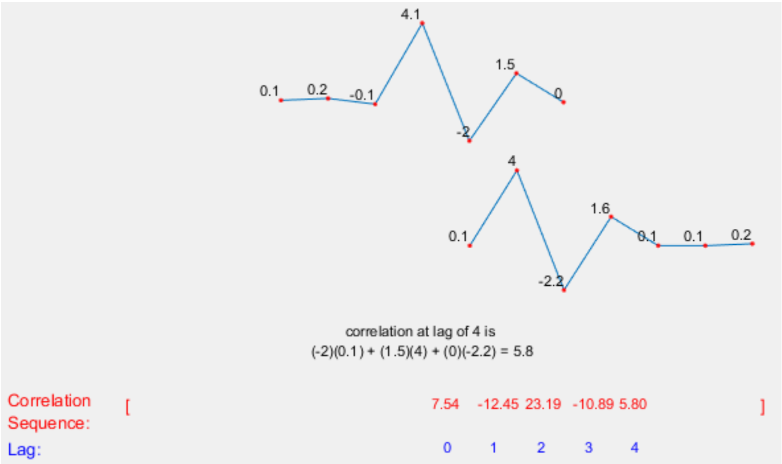
Ultima egalitate este valabilă în ipoteza staţionarităţii semnalelor de intrare şi de perturbaţie.

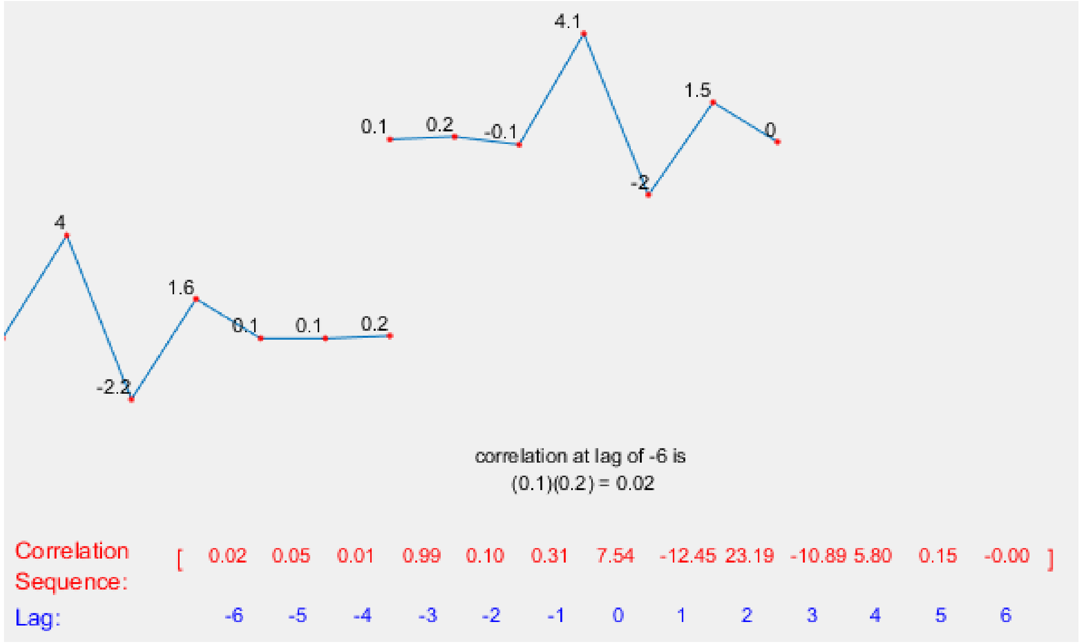
Functia de corelatie intre 2 semnale (exemplificare)

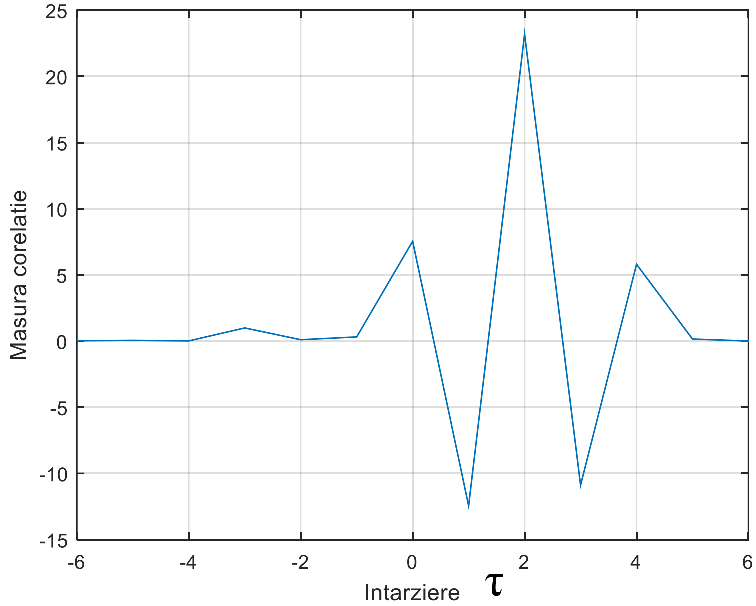
$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x(kT_e)y(kT_e+\tau)$$











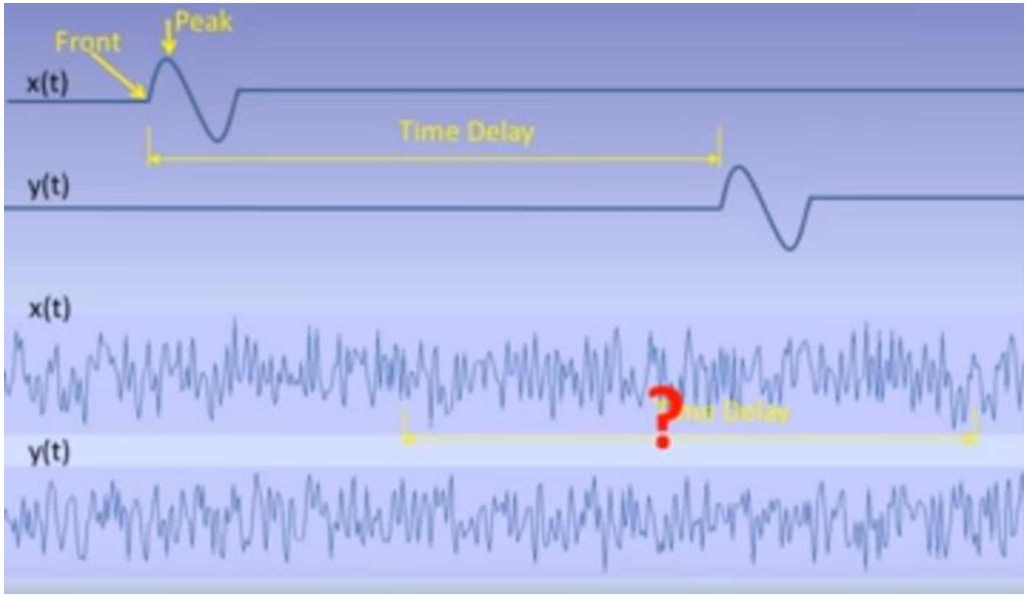
Idee utilizare ?!

Masurare intarziere intre 2 semnale !

Functia de corelatie intre 2 semnale (exemplificare)

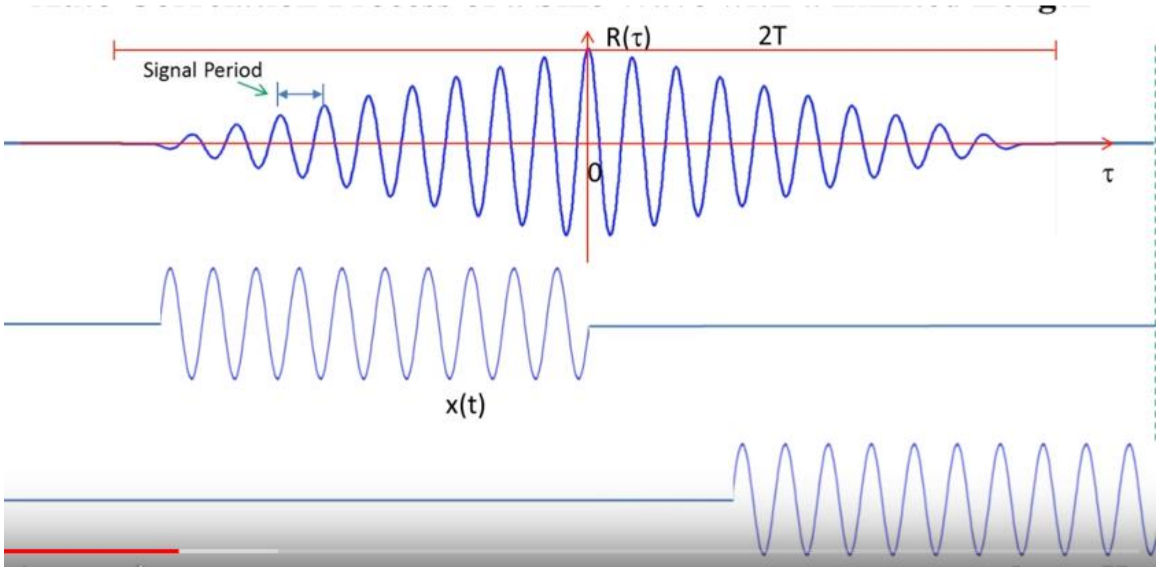
Idee: masurare intarziere intre 2 semnale !

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(kT_e)y(kT_e + \tau)$$



Posibil pe osciloscop

? .... Functia de corelatie



Pentru că *u(t)* şi *v(t)* nu sunt corelate, funcţia de intercorelaţie

$$R_{uv}(\tau) = 0 \quad (\forall)\tau$$

şi obtinem

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^\infty h(\sigma) R_{uu}(\tau - \sigma) d\sigma \qquad (3.69)$$

care reprezintă **ecuaţia Wiener Hopf.**

În cazul discret, $\tau = kT_e, \sigma = iT_e$ şi funcţia de intercorelaţie (3.69)

se calculează cu relaţia

$$R_{uy}(kT_e) = T_e \sum_{i=0}^\infty h(iT_e) R_{uu}\left((k-i)T_e\right) \qquad (3.70)$$

Se observă că funcţia de intercorelaţie intrare-ieşire nu este influenţată de perturbaţiile exterioare.

Aplicând transformata Fourier în relaţia Wiener Hopf

$$R_{uy}(\tau) = \int_{0}^{\infty} h(\sigma) R_{uu}(\tau - \sigma) d\sigma$$

se obţine expresia

$$S_{uy}(\omega) = H(j\omega) S_{uu}(\omega) \qquad (3.71)$$

care reprezintă ecuaţia **Wiener-Hincin** în care:

- $S_{uu}(\omega)$ este **funcţia de densitate spectrală** a mărimii de intrare,
- $S_{uy}(\omega)$ **este funcţia de densitate interspectral**ă a mărimilor *u* şi *y*,
- $H(j\omega)$ este răspunsul la frecvenţă al sistemului.

Densitatea spectrala

Utilizata pentru a caracteriza procese aleatorii stationare, in domeniul frecventei!

Densitatea spectrala a unui semnal x(t) este transformata Fourier a functiei de autocorelatie $R_{xx}(\tau)$ a acestuia:

$$S_{xx}(\omega) = F\left\{R_{xx}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Funcia de autocorelatie $R_{xx}(\tau)$ se determina aplicand transformata Fourier inversa:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Densitate interspectrala a doua semnale x(t) si y(t):

$$S_{xy}(\omega) = F\left\{R_{xy}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Pentru un semnal x(t) integrala Fourier defineste spectrul de frecvente al functiei:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)$$

iar

$$S_{xx}(\omega) = \left|X(j\omega)\right|^2$$

Funcţia de autocorelaţie a mărimii de ieşire se calculează cu relaţia

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] = \\
&= E[(\int_0^{\infty} h(\eta)u(t-\eta)d\eta + v(t))(\int_0^{\infty} h(\xi)u(t+\tau-\xi)d\xi + v(t+\tau))] = \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(\eta)h(\xi)E\big(u(t-\eta)u(t+\tau-\xi)\big)d\eta d\xi + \int_0^{\infty} h(\eta)E[u(t-\eta)v(t+\tau)]d\eta + \\
&+ \int_0^{\infty} h(\xi)E[u(t+\tau-\xi)v(t)]d\xi + E(v(t)v(t+\tau)) = \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(\eta)h(\xi)R_{uu}(\tau+\eta-\xi)d\eta d\xi + \int_0^{\infty} h(\eta)R_{uv}(\tau+\eta)d\eta + \\
&+ \int_0^{\infty} h(\xi)R_{uv}(\tau-\xi)d\xi + R_{vv}(\tau)
\end{aligned}
\qquad (3.72)
$$

Pentru că *u(t)* şi *v(t)* sunt necorelate $R_{uv}(.) = 0$, (3.72) devine

$$
R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(\eta)h(\xi)R_{uu}(\tau+\eta-\xi)d\eta d\xi + R_{vv}(\tau) \qquad (3.73)
$$

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\eta) h(\xi) R_{uu}(\tau + \eta - \xi) d\eta d\xi + R_{vv}(\tau) \qquad (3.73)$$

Aplicând transformata Fourier în (3.73) se obţine funcţia de densitate spectrală a ieşirii

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) + S_{vv}(\omega) \qquad (3.74)$$

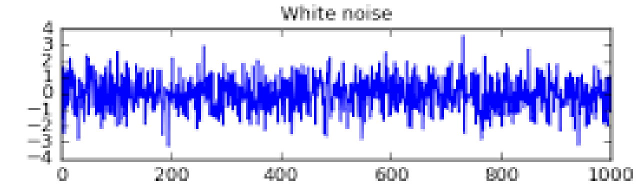
Relaţia (3.74) arată că din funcţiile de densitate spectrală ale ieşirii şi intrării, modulul răspunsului de frecvenţă | H(jω)| se poate determina cu aproximaţie, datorită influenţei densităţii spectrale a semnalului perturbator.

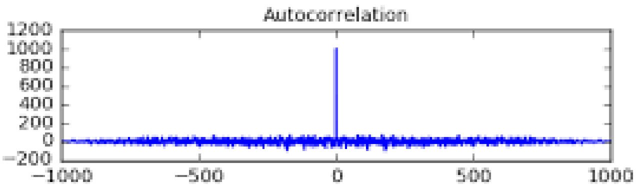
Din relaţiile precedente rezultă că, prin cunoaşterea fie a funcţiilor de corelaţie, fie a funcţiilor de densitate spectrală, se pot rezolva ecuaţiile (3.69) sau (3.71).

Se pun în evidenţă două metode de identificare:

- Pe baza determinării funcţiilor de corelaţie şi a rezolvării ecuaţiei Wiener Hopf (3.69) se obţine **o soluţie în domeniul timpului** sub forma funcţiei pondere *h(t)* a sistemului.

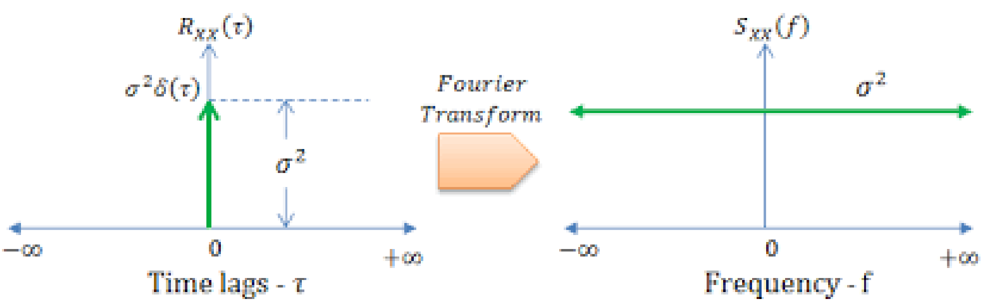
Dacă semnalul de probă (de intrare) este de tip zgomot alb, funcţia de autocorelaţie a intrării este de forma impulsului Dirac, iar funcţia de densitate spectrală este constantă:

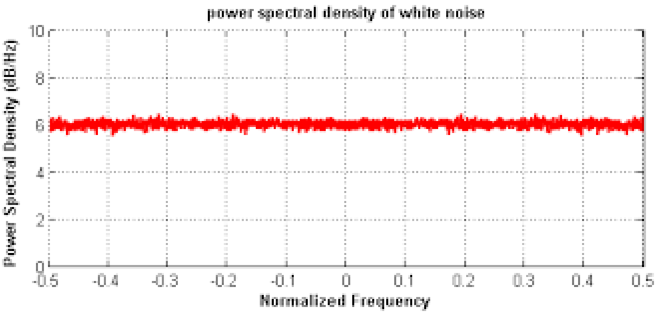




$$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$$

$$S_{uu}(\omega) = 1; \quad -\infty \leq \omega < \infty$$





Se pun în evidenţă două metode de identificare:

- Pe baza determinării funcţiilor de corelaţie şi a rezolvării ecuaţiei Wiener Hopf (3.69) se obţine **o soluţie în domeniul timpului** sub forma funcţiei pondere *h(t)* a sistemului.

Dacă semnalul de probă (de intrare) este de tip zgomot alb:

$$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$$
$$S_{uu}(\omega) = 1; \quad -\infty \leq \omega < \infty$$

În aceste condiţii rezolvarea ecuaţiilor (3.69), (3.71) se simplifică, soluţiile lor fiind chiar funcţia pondere, respectiv **răspunsul la frecvenţă**:

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^\infty h(\sigma)\delta(\tau - \sigma)d\sigma = h(\tau) \qquad (3.76)$$
$$S_{uy}(\omega) = H(j\omega)$$

Identificarea sistemelor pe baza funcţiilor de corelaţie

Dacă semnalul de intrare este ***ergodic***, atunci media pe ansamblu poate fi înlocuită cu estimatorul pe baza unei singure realizări

$$m_u^T = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \qquad (3.77)$$

unde T este durata observării sistemului.

În mod asemănător se pot introduce estimatorii pentru funcţiile de corelaţie :

$$R_{uu}^T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)u(t+\tau)dt$$

$$R_{yy}^T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)y(t+\tau)dt \qquad (3.78)$$

$$R_{uy}^T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)y(t+\tau)dt$$

Aceşti estimatori sunt variabile aleatoare depinzând de eşantion, iar calităţile lor depind de durata T a eşantionului.

Valorile medii ale funcţiilor de corelaţie se calculează cu relaţiile :

$$
\begin{aligned}
E[R_{uu}^{T}(\tau)] &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} E[u(t)u(t+\tau)]dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} R_{uu}(\tau)dt = R_{uu}(\tau) \\
E[R_{uy}^{T}(\tau)] &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} E[u(t)y(t+\tau)]dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} R_{uy}(\tau)dt = R_{uy}(\tau)
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

Rezultă că estimatorii funcţiilor de corelaţie au valorile medii egale cu valorile adevărate ale acestor funcţii, deci sunt estimatori nedeviaţi.

Totuşi, în calculul funcţiilor de corelaţie se produce o eroare datorită trunchierii datelor la un interval de lungime finită. În realitate datele de intrare şi de ieşire sunt discretizate, adică pentru o perioadă de eşantionare T_e=1:

$$u_k = [u(1) \quad \mathrm{u}(2) \ldots \mathrm{u}(\mathrm{N})]^{\mathrm{T}}$$

$$y_k = [y(1) \quad \mathrm{y}(2) \ldots \mathrm{y}(\mathrm{N})]^{\mathrm{T}}$$

Erorile introduse de discretizare sunt suficient de mici dacă intervalul de eşantionare este ales corespunzător, conform **teoremei lui Shannon**

$$T_e \le \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{T_c}{2}; \quad f_e \ge 2 f_c \tag{3.80}$$

unde ω_c este pulsaţia cea mai mare conţinută în spectrul mărimii eşantionate.

Timpul de întârziere maxim τ_{max} se alege după criteriile:

- τ_{max} > t_s (timpul de stabilizare) pentru ca funcţia de corelaţie să prindă toate valorile funcţiei pondere.

$$\tau_{\max} \geq \frac{2\pi}{\omega_{\min}} = T_{\min} \qquad (3.81)$$

$$T \geq 10\tau_{\max} \qquad (3.82)$$

unde ω_{min} este cea mai mică pulsaţie din spectrul mărimii eşantionate.

Calculul efectiv al estimatorilor funcţiilor de corelatie se realizează prin discretizarea integralelor. Considerând $T = NT_e$, $t=iT_e$, $\tau = kT_e$, rezultă (pentru T_e =1):

$$\begin{aligned} R_{uu}^{T}(k) &= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} u(i)u(i+k); \quad \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ R_{uy}^{T}(k) &= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} u(i)y(i+k); \quad \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots\ldots \end{aligned} \qquad (3.83)$$

Deoarece nu dispunem decât de N date, sumele trebuie restrânse astfel încât, pentru T_e=1, rezultă:

$$R_{uu}^{T}(k)=\frac{1}{N-k+1}\sum_{i=0}^{N-k}u(i)u(i+k);\quad \mathrm{k}=0,1,2,......$$
$$R_{uy}^{T}(k)=\frac{1}{N-k+1}\sum_{i=0}^{N-k}u(i)y(i+k);\quad \mathrm{k}=0,1,2,......$$ (3.84)

Pentru semnalele pseudoaleatoare binare, funcţia de autocorelaţie se prezintă ca o mărime periodică, sub forma unor impulsuri care apar la intervalul NT_e , iar între acestea valoarea sa nu este nulă. Pentru o perioadă NT_e această funcţie se exprimă prin relaţia

$$R_{uu}^{N}(kT_e)=a^2\left[\frac{N+1}{2N}\delta(kT_e)+\frac{N+1}{4N}\right]$$ (3.85)

Această expresie conţine doi termeni: primul corespunde funcţiei impuls (aproximează funcţia impuls), al doilea termen este constant pe întreaga perioadă.

Pe o perioadă NT_e funcţia de intercorelaţie între intrare şi ieşire va fi

$$R_{uy}^{T}(kT_e) = T_e \sum_{i=0}^{N} h(iT_e) R_{uu}\big((k-i)T_e\big) =$$

$$= a^2 T_e \frac{N+1}{2N} \sum_{i=0}^{N} h(iT_e)\delta\big((k-i)T_e\big) + a^2 T_e \frac{N+1}{4N} \sum_{i=0}^{N} h(iT_e)$$

$$R_{uy}^{T}(kT_e) = a^2 \frac{T_e(N+1)}{2N} h(kT_e) + a^2 T_e \frac{N+1}{4N} \sum_{i=0}^{N} h(iT_e)$$

(3.86)

Pentru valori mari ale întârzierii $\tau = kT_e,\;\; h(kT_e)$ tinde la zero

şi din (3.86) rezultă

$$h_\varepsilon = a^2 \cdot T_e \frac{N+1}{4N} \sum_{i=0}^{N} h(iT_e) \cong R_{uy}^N(kT_e) \quad (3.87)$$

Ţinând seama de (3.87) din (3.86) se poate determina funcţia pondere cu relaţia

$$h(kT_e) = \frac{1}{a^2 T_e} \frac{2N}{N+1} [R_{uy}^T(kT_e) - h_\varepsilon] \quad (3.88)$$

Se pune in evidenta ca h_ε este eroarea datorata valorii constante a functiei de autocorelatie egală cu $a^2 \frac{N+1}{4N}$ pe intreaga perioada.

În MATLAB, pentru analiza de corelaţie şi estimarea răspunsului la impuls se utilizează funcţia ***cra***.

- Se notează cu *z* datele intrare-ieşire, incluse într-un fişier *iddata* sau într-o matrice cu 2 coloane ***z=[y u].***
- Funcţia *cra* se poate apela sub formele:

$$ir = cra(z)$$

$$[ir, R, CL] = cra(z, \tau, nfa, plot)$$

Cu **prima variantă se obţine răspunsul la impuls estimat**.

A doua variantă permite accesul la : τ – numărul de perioade ale întârzierii pentru care sunt calculate funcţiile de corelaţie (valoarea implicită este τ = 20); *nfa* – ordinul filtrului de albire (valoarea implicită este *nfa*=10); pentru *nfa* =0 (nu se produce preaalbirea) se obţine funcţia de covarianţă a datelor originale;

$$ir = cra(z)$$

$$[ir, R, CL] = cra(z, \tau, nfa, plot)$$

Cu **prima variantă se obţine răspunsul la impuls estimat**.

A doua variantă permite accesul la : τ – numărul de perioade ale întârzierii pentru care sunt calculate funcţiile de corelaţie (valoarea implicită este τ = 20); *nfa* – ordinul filtrului de albire (valoarea implicită este *nfa*=10); pentru *nfa* =0 (nu se produce preaalbirea) se obţine funcţia de covarianţă a datelor originale;

plot poate lua valorile:

- *plot*=0 nu reprezintă grafic răspunsul;
- *plot*=1 (valoare implicită) reprezintă grafic răspunsul la impuls *ir ;*
- *plot*=2 reprezintă grafic toate componentele lui *R.*

$$ir = cra(z)$$

$$[ir, R, CL] = cra(z, \tau, nfa, plot)$$

Pentru plot=2, pe grafic este reprezentat răspunsul pentru un impuls de intrare normalizat $u(t)=1/T_e$, pentru $0<t<T_e$, unde T_e este perioada de eşantionare a datelor.

R conţine informaţii despre funcţiile de corelaţie:

- *R(:,1)* conţine indicii întârzierii;
- *R(:,2)* conţine funcţia de covarianţă a lui *y*,
- *R(:,3)* conţine funcţia de covarianţă a lui *u*,
- *R(:,4)* conţine funcţia de intercorelaţie între *u* şi *y*.
- *CL* este 99% , nivel semnificativ pentru răspunsul la impuls.

Exemplu Se consideră sistemul definit prin vectorii coeficienţilor A,B,C

```
>>A=[1 -1.2 0.6]
>>B=[0 1 0.5]          % model ARMAX:  A(z)y(t) = B(z)u(t) + C(z)e(t)
>>C=[1 -0.8 0.4]
```

```
A(z) = 1 - 1.2 z^-1 + 0.6 z^-2

B(z) = z^-1 + 0.5 z^-2

C(z) = 1 - 0.8 z^-1 + 0.4 z^-2
```

Se determină modelul THETA asociat acestui sistem

```
>>th0=poly2th(A,B,C).
```

Se consideră semnalul de intrare *u* de forma unui semnal pseudoaleator binar şi un semnal perturbator *e* de forma *e*=0.2**u*:

```
>>u= sign(randn(400,1));
>>e=0.2*randn(400,1);
```

Se determină răspunsul sistemului *y* prin simulare numerică şi se formează matricea *z* de date intrare-iesire:

```
>>y=idsim([u e],th0);
>>z=[y(1:200) u(1:200)].
```

Cu *idplot* se obţine reprezentarea grafică a datelor intrare-ieşire
>>idplot(z,1:100).
În figura 3.16 sunt reprezentate primele o sută de eşantioane intrare –ieşire.

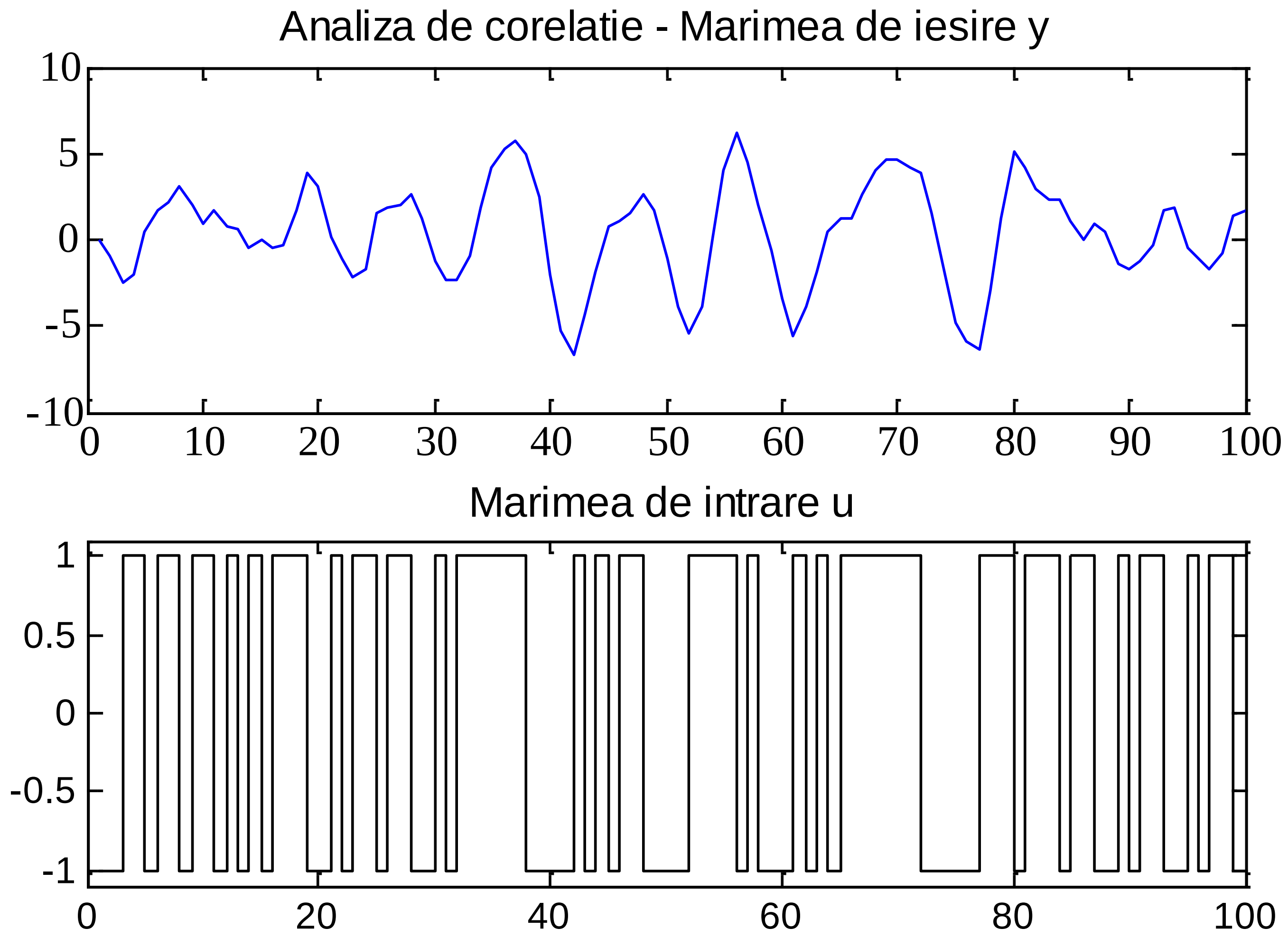


Fig. 3.16

Se alege întârzierea $\tau > 20$ si ordinul filtrului de albire *nfa* > 10

>>τ=30;

>>nfa=15;

Se estimează răspunsul la impuls utilizând funcţia *cra*

>> **[ir,R,CL]=cra(z,τ,nfa,2);**

Cu una din următoarele instrucţiuni:

>>ir=cra(z);grid

>>plot(ir);grid

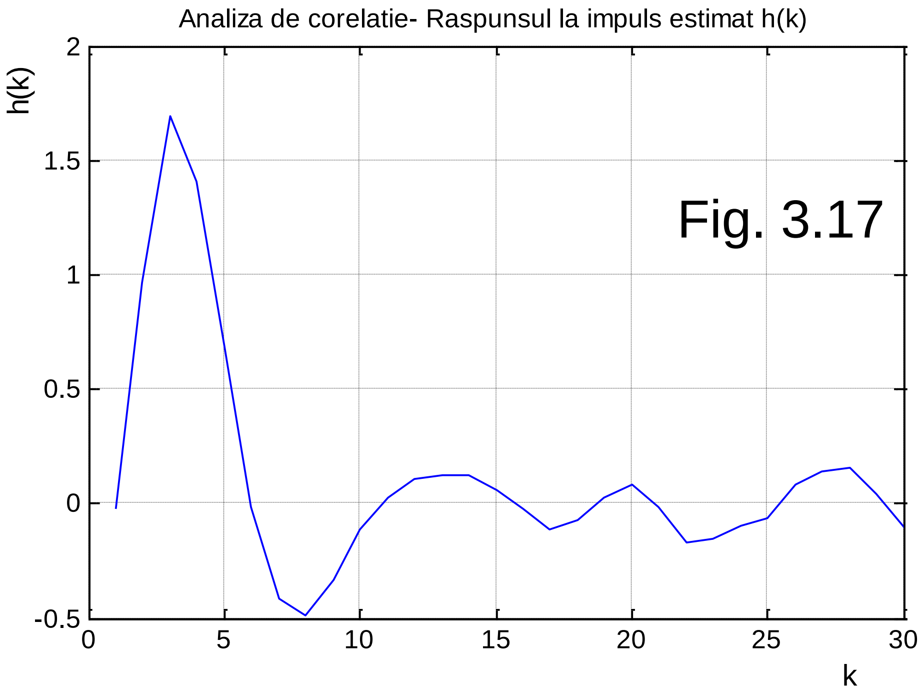


Fig. 3.17

se obţine reprezentarea grafică a răspunsului la impuls estimat, în figura 3.17.

Pentru *plot*=2 în funcţia *cra* se reprezintă grafic funcţiile de covarianţă : a ieşirii - R_{yy}, a intrării - R_{uu} şi funcţia de intercorelaţie intrare-ieşire –R_{uy}, precum şi răspunsul la impuls estimat, ca în figura 3.18.

Pentru ***plot*=2** în funcţia ***cra***, se reprezintă grafic funcţiile de covarianţă : a ieşirii - R_{yy}, a intrării - R_{uu} şi funcţia de intercorelaţie intrare-ieşire –R_{uy}, precum şi răspunsul la impuls estimat, ca în figura 3.18.

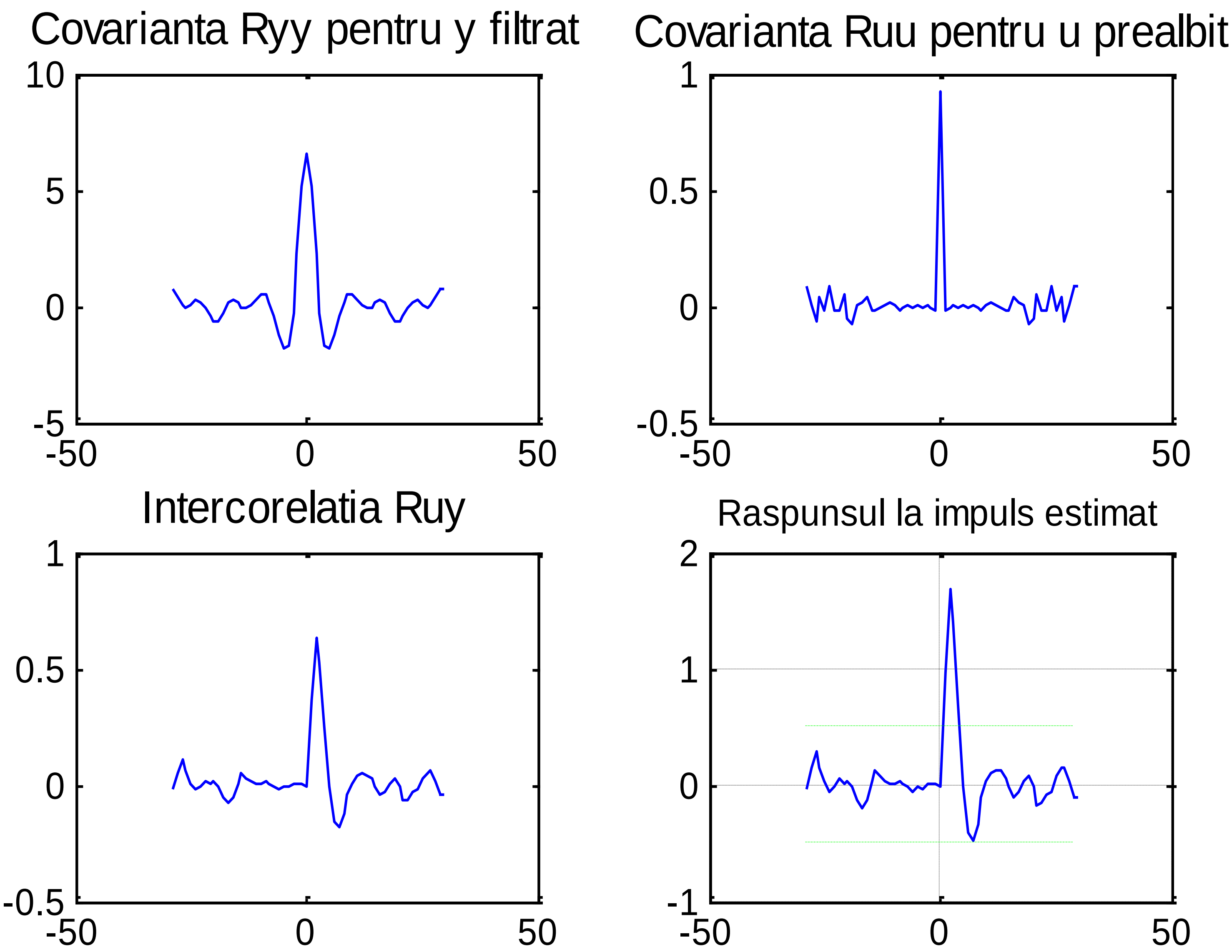


Fig. 3.18